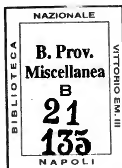
PESSINA

I VOLUMI DI TERRA


FONDO PROVINCIA


NAZIONALE
BIBLIOTECA
B. Prov.
Miscellanea
B
21
135
VITTORIO EM. III
NAPOLI

I VOLUMI DI TERRA

NELLE

OPERE DI FORTIFICAZIONE TEMPORANEA

MEDIANTE

UNA NUOVA FORMOLA ANALITICA

MEMORIA

DI

LUIGI GABRIELE PESSINA

CAPITANO DI FANTERIA

NAPOLI

STAMPERIA DELLA R. UNIVERSITÀ

1864



AL BENEVOLO LETTORE

Le scienze e le lettere oggidì hanno nella umana società prodotto, oltre ad innumerevoli effetti benefici sull' uomo, ancora quello del magnifico spettacolo della *imponente immensità* di libri e di stampati da per ogni dove, che quasi profluvio indescrivibile va crescendo col correr dei giorni.

E per poco che un novello scrittore, presentandosi alla pubblica opinione, agogni a prender fama meritata dei suoi lavori; ha bene di che trarre argomento di segreto sconforto e timore in presenza d'una società cotanto illuminata. E i soggetti che si trattano, e si svolgono oggimai, vogliono essere classici, colossali, ed appoggiati in principal modo sulle quistioni più importanti dell'umana società.

Noi non sappiamo aspirare a tanta elevata impresa; ma, presentandoci con questa Memoria alla pubblica

indulgenza, siamo animati dal desiderio di renderci utili altrui, quanto meglio possiamo, in tempi che diconsi di pace, o almeno secondo l'Alighieri

« *Ora che il vento, come fa, si tace* ».

Posano oggi le armi: e le penne lavorano indefesse: e noi, dal canto nostro, non vediamo perchè neghittosa debba starsi la nostra penna; quando possiamo tornare utili altrui con essa in qualche modo.

Presentiamo quindi questo picciolo lavoretto. Esso riguarda in certo mo' le matematiche applicate alla guerra nella parte speculativa.

A prima giunta esso parrà non aver ragion di essere, presentandolo così da solo. Ma se ben si consideri lo scopo prefissoci « *Renderci utile altrui nel nostro miglior modo* » e poi se si pon mente che il suo soggetto è trattato nei libri di Fortificazione: parrà subito e chiaro, che bene a proposito abbiamo scelto questo *tralcio* fra i rami delle scienze per racconciarlo e metterlo in punto di luce utile e buona; senza che avessimo dovuto trattar da cima a fondo della fortificazione, per dire il nostro tenue fatto novello. Noi scriviamo per coloro che sono interessati alle scienze di guerra: e perciò solo pensiamo che ciascuno sia versatissimo nella fortificazione; e quindi possiamo presentare il nostro lavoretto senza timore di non essere inteso.

Vero è pur troppo che anche gli architetti ed ingegneri civili possono trarne vantaggio. Ma ciò, che interesserà la dottissima loro classe, non ha mestieri

che s'abbia a conoscere la fortificazione ad ogni costo. E bastano all'uopo le cognizioni da essi possedute in Geometria descrittiva ed in Meccanica per farsi ad esaminare nel nostro lavoro, il solido di cui proponiamo la misura, e le calcolazioni da noi adoperate per averla.

Trattasi quì in fondo del vero di presentare un Teorema nuovo di Meccanica per lo quale quello, conosciutissimo, di Guldino riceverà grandissimo incremento nell'applicazione, anche quando la sezione generatrice dei corpi non si mantiene costante.

Questo Teorema a poco a poco siamo quì per esporre. E ne abbiamo fatta l'applicazione ai solidi della Fortificazione: e la si può fare benanche a quelli degli argini e dei lavori di terra. E perchè le cose procedessero per la via più breve, abbiamo preso per punto di partenza appunto il quesito che tuttora tiensi soluto solo per approssimazione « il calcolo dei volumi delle opere di fortificazione temporanea » dal quale esso in effetti ha avuto origine. Nutriamo speranza che, l'utilità prodotta, ci farà indulgenti i dotti, nel vedere che abbiamo data individualità isolata ad una trattazione che ordinariamente si è riguardata connessa a molti altri elementi, costituenti un *Ente* che dicesi comunemente Fortificazione. In effetti questo che ora presentiamo isolato fa parte d' un esteso lavoro che da molti anni stiamo producendo, e che fin dal 1856 dovea andar per le stampe, ma che per effetto dei *tempi* e dei *casi* è rimasto impedito.

Esso per altro sotto il semplice titolo di Memoria ci è sembrato che possa andar per le stampe.

Senza forse altre memorie potranno in avvenire esser presentate all'indulgenza del pubblico scienziato; e dalla riunione di esse risultare adagio adagio un corpo completo a cui la benignità degli uomini intelligenti avrà data la sua sanzione a parte a parte.

Sotto tali punti di vista e non altrimenti ci facciamo animo di presentarlo, raccomandandolo di presente a chi legge.

Dal Forte di Bard, 27 ottobre 1864.

I.

Il calcolo dei volumi di terreno da cavarsi o cavati, da elevarsi o elevati sì nelle costruzioni civili, che nelle fortificazioni; è di necessità assiomatica, per coloro che si occupano di materie siffatte.

La sua necessità, per le persone estranee a queste materie, non istaremo qui a sviluppare con lunghi discorsi; ma sibbene con brevi parole speriamo di persuader ciascuno, per fior di senno che avesse.

Una qualunque Costruzione, si fa da lavoratori; i quali aspettano la mercede dell'opera loro: onde convien sapere quanto sia stato il fatto da essi, per retribuirli con giustizia.

Qualunque lavoro militare poi, oltre di ciò, ha un tempo cui obbedire; e dei limiti ai mezzi con cui produrlo. Ciò basta per vedere il numero d'uomini proporzionale, e le possibili estensioni da dare al da fare.

Le quali due considerazioni bastano per dimostrare la necessità dell'economia del tempo e del lavoro: e, con essa necessità, quella del calcolo di siffatti lavori.

L'essenziale principio che ci ha guidati in tal trattazione è stato quello che: Tale calcolo ha formato e forma tuttora uno dei quesiti più importanti, e di esecuzione faticosa, com'è appunto il mettere ad atto qualunque idea, che dal campo della Teoria si trasporti in quello della pratica manoduzione.

Or siccome *i metodi tenuti finora* e comunemente conosciuti, oltre alle proprie difficoltà di calcolo, *conservano l'inesattezza* più o meno sensibile dell'approssimazione, con cui si risolve l'enunciato problema: così noi ci facciamo pregio e dovere per l'agevolazione dell'altrui lavoro, e per l'incremento della scienza, di esporre quì appresso un metodo nostro, consistente nell'applicazione d'una formola *da noi trovata*, semplice, chiara ed esatta per quanto il rigore matematico possa richiedere.

Laonde mettendo in base che la costruzione d'un trinceramento abbia ad eseguirsi mediante lo scavo d'una quantità di terreno in fortificazion passeggera; entriamo in materie, senza distenderci in altri incidenti di prologo sulla quistione enunciata.

II.

1. Si sa che le terre cavate da un luogo in date dimensioni, e messe in cumulo in un altro, recano, nella cubatura del novello riempimento, una eccedenza di materiale proveniente dal sesto che prendono nella novella positura, non perfettamente uguale a quella che avevano, quantunque fortemente si comprimano col battimento; la quale eccedenza varia secondo le diverse qualità delle terre, tra $\frac{1}{12}$ e $\frac{1}{8}$ del volume cavato. Questo dicesi *rapporto*. Per la qual cosa lo sterro deve esser fatto minore del riempimento o rinterro desiderato affinchè l'eccedenza, od il rapporto, stabilisca l'equilibrio d'uguaglianza richiesto. Se dunque un terreno ha per rapporto $\frac{1}{10}$ è facile vedere che $\frac{9}{10}$ di cavamento daranno il riempimento cercato: se chiamiamo quindi S^3 il numero dei metri cubici di sterro, ed R^3 quelli del riempimento; si dovrà avere $R^3 = \frac{9}{10}S^3$: infatti $\frac{9}{10}S^3$ cavati essendo messi in opera, e dando $\frac{1}{10}S^3$ di eccedenza; nel terminare il riempimento coi $\frac{9}{10}S^3$ si avrà $R^3 = S^3$, cioè tanta terra cavata, quanta ne bisognava a produrre R^3. Se ora supponiamo cono-

sciuto R^3 ed il rapporto $\frac{1}{10}$, ed ignoto S^3; lo si potrà ricavare dalla relazione tra R^3 e S^3, ed avremmo

$$S^3 = \frac{10}{9} R^3 . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

2. Finora abbiamo fatta astrazione del modo di calcolare l'R^3 e l'S^3; veniamo quindi a tal determinazione, affinchè dessa stabilita e praticata, si possa sostituire nella (1) ad R^3 il valore che gli compete, e sapere quanto debbasi dare ad S^3, le cui dimensioni, conosciuto il prodotto, si potranno far convenevolmente variare secondo i riguardi che si debbono avere alle varie condizioni, che ci sono imposte dallo scopo dell'opera.

È da ricordare però che nelle opere di fortificazione il luogo, ove si fa lo sterro, è il fosso; che questo è una parte delle principali delle opere: che le terre, che si cavano, si adoperano al riempimento: che le dimensioni del fosso e del riempimento non sono sottomesse soltanto alle leggi della quantità necessaria, o possibile a cavarsi, del materiale; ma che bensì sono anche soggette alle condizioni della difesa, e a quelle della possibilità della produzione pei mezzi di cavamento e di riempimento.

Infatti delle tre dimensioni del volume di esso fosso, la lunghezza deve ubbidire ai regolamenti dell'efficacia delle passate delle armi pei rami che si fiancheggiano; ai regolamenti della preclusione del cammino all'avversario; allo sviluppo delle forze animate, e di quello delle macchine da impiegare: e in breve il fosso deve cingere l'opera. La larghezza dev'essere tale che il lato, o labbro, o ciglio esterno della sua bocca sia nel piano del piovente del parapetto, o passare al disotto di questo tra $0^m,50$, e $1^m,00$: e che tra esso lato esterno e quello interno della stessa bocca nel piano della campagna, sia tale distanza che un uomo non possa superarla di salto· e ancora più, che non sia maggiore di quello che può comportare la passata della forza dell'uomo che maneggi una pala a gettar la terra verso il riempimento. La profondità deve a simiglianti riguardi ubbidire ancora, eccetto del passare alcun suo punto pel piano del piovente. (Per le quali cagioni d'altronde le variazioni convenevoli si

ottengono mediante le formole già contemplate nel bel principio della fortificazione temporanea).

E frattanto a tutte queste condizioni, si deve per necessità aggiungere anche quella del sufficiente e necessario quantitativo. Imperocchè tagliando più terra di quel che bisogna, si spreca il tempo e l'opera: e quel numero d'uomini che pel taglio inutile esuberante sarebbe impiegato, potrebbe essere in altri utili lavori e in altri bisogni occupato. Il contrario poi, potrebbe far rimanere allo scoverto i difensori, ed i trinceramenti non risponderebbero al fine. Sia detto frattanto per incidente, fra i due mali il minore è il secondo.

3. Ma quantunque, scrupolosamente riguardando la cosa, sia, d'assoluta necessità stabilire con anticipo ciò ch'è indispensabile per avere l'esatto equilibrio richiesto; pure nella pratica è impossibile ottenere tanta esattezza. E mentre conveniamo che forse moltissimi trinceramenti sieno stati battuti, o presi, o tornati inutili, in principal modo per tali riguardi; pure non possiamo disconvenire contemporaneamente dell'impossibilità quasi assoluta dell'eliminazione degl'inconvenienti enunciati, almeno coi mezzi di cui finora si è fatto uso.

Intanto osserviamo che la pratica delle costruzioni delle opere di fortificazione si ha, o nel tempo di pace, o in quello di guerra; ed in questo secondo caso può avvenire o che le opere si facciano tumultuariamente, o non tumultuariamente; che vale durante un'assenza più o meno prolungata dell'inimico.

Le opere che si costruiscono nel tempo di pace sono le fortificazioni permanenti, che vanno fatte in costruzioni murali, per lo più; sono le opere di terra per quei punti strategici geografici di second'ordine, intorno ai quali si fanno le opere principali per assegnare i fondamenti dell'indole da far prendere nei bisogni ad un campo trincerato o ad un gran posto di guerra: sono infine le opere che per gli esercizii delle scuole d'applicazione in operazioni belliche fittizie, si costruiscono.

In secondo luogo le tumultuarie sono quelle che si fanno o sotto il fuoco stesso dell'inimico: tra le 10 o 12 ore prima di venire alle mani: fra i due, tre, o più giorni prima dello scontro.

In terzo luogo l'assenza più o meno prolungata dell' inimico si verifica nel tempo delle tregue od armistizii; in quello dei quartieri d' inverno; in quello che si può spendere, dietro un fronte di operazione del grosso delle forze, da un'armata di osservazione o di riserva, che prepara le linee di difesa, o le basi eventuali, ecc. Nel primo, il tempo si può dire arbitrario; nel secondo è sì scarso che non fa mestieri dirlo; nel terzo poi, va dalle tre o quattro settimane fino ai tre, quattro o più mesi. Nel caso della pace, salvo le applicazioni per esercizio, che formano eccezione e si possono proporre moltissimi fini; e salvo le grandissime differenze, che potrebbero essere di grave momento nel totale della spesa; per quanta esattezza si adoperi per l'economia, ch'è il solo riguardo essenziale; non si potrà giammai ovviare ad uno sprecamento più o meno grande di sterro e di riempimento, ed il quale resta sempre assorbito nel totale delle cose. In questo caso istesso i volumi dei riempimenti si ottengono la mercè delle cognizioni geometriche più o meno complicate: ed il solido da valutare si cerca di ridurlo a prismi retti, od obliqui, od a solidi terminati da sei facce, le quali o son tutte piane, od almeno cinque ne sono tali e la sesta si fa che possa ammettere una generatrice rettilinea. E si hanno le formole atte a dare i valori in metri cubici, o in altra qualsiasi unità dei volumi proposti: formole frattanto che non danno un' esattezza matematica, nè son di facile maneggio e spedito.

Nel tempo di guerra poi, s' è il caso tumultuario, non darebbe nel ridicolo colui che si presentasse a calcolare le dimensioni di un'opera, mentre forse i soldati non hanno potuto per le strettezze prender cibo pria di ritornare in armi? Ma ponghiamo, non tanta strettezza di tempo, e mettiamo i due altri casi del tumultuario stato. Che si può pretendere d'ottenere dagli uomini trafelati forse dal cammino o dalle indigenze dello stato violento di guerra, se non che tutto al più un' opera a profilo di trincea? E fra i tre, quattro, e sieno cinque fino a sette giorni? Dato che si potesse attirare il nemico nella posizione che si prepara; egli è da pensare più alle opere accessorie, cioè, palancate, gabbionate, blokaus coperti di terra, cascine e villaggi resi forti con barricate, e tutt' al più nelle prin-

cipali uscite o vie praticabili qualche lunetta, o dente; anzichè a formare opere di terra esatte in campagna rasa. Le operazioni in guerra e il da fare son così complicate che un capo di picciolo ordine deve sviluppare tutta l'attività e prestezza ch'è in un uomo, per mandare in regola tutte le semplici operazioni. Ma quel che più interessa a considerare, è appunto: che nella furia e fretta e rapidità del succedersi delle cose, solo gl'ideali crederanno fattibile di conservare la serenità dell'occhio e della mente per riconoscere le proprietà fortificative di un luogo appena giuntovi, e fare il giudizio esatto delle rispondenze tra i siti e dei loro rapporti con la tattica, e con la strategia. Ecco perchè Napoleone diceva che la fortificazione abbisognava di essere *riveduta*, e soprattutto quella di *campagna*. Dunque nei primi due giorni, e forse tre, saranno sviluppati trinceramenti sommarii che consisteranno in barricate, in apparecchi di cascine fortificate, ecc. e poi nei seguenti giorni si fisseranno meglio le idee, si riconosceranno effettivamente i luoghi, e riserbandosi sempre un giorno o due per l'armamento e il coronamento di pezzi delle batterie, ecc., resteranno appena due o tre giorni utili alla costruzione di opere di terra. E nella quale strettezza di tempo, l'andare in cerca dell'esattezza è più pernicioso del male istesso.

In terzo luogo poi nelle fortificazioni eventuali si ha qualche spazio di tempo, e lo si può concedere all'economia del tempo istesso e del lavoro; tanto più che la produzione suole pagarsi a misura ai lavoratori. Ma sì in questo caso come in quello di pace la moltiplicità e la difficoltà dei lavori costringe ad immensità di cure e di calcolazioni, e si vorrebbe ottenere un metodo che all'esattezza riunisse la semplicità e la prestezza. Ecco perchè nelle opere eventuali di campagna si è adottato di calcolare i solidi mediante il teorema di Guldino, cioè, moltiplicando la sezione del solido pel viaggio del centro di gravità di questa sezione, fra i limiti che a questo viaggio pone una sezione costante: e a misura che varia, dividere il totale viaggio in parti ove la sezione si mantenga sensibilmente costante. Tal procedimento noi considereremo utile e conducente, e quante volte la parte speculativa volesse introdursi in simili cose, la

crederemo sempremai di difficile applicazione, quantunque noi medesimi avessimo trovato un metodo per procedere esattamente o con errori infinitamente piccoli, alla valutazione di un solido qualunque di fortificazione; metodo che fra breve sporremo e che forse nei lavori di pace potrebbe, come dimostreremo, essere premesso a'comunemente usati.

4. Il metodo di Guldino è esattamente applicato sempre quando si possa intendere il solido diviso in parti prodotte dal cammino della sezione costante; ovvero per un trinceramento in linea retta. Noi aggiungeremo frattanto: 1° che se il trinceramento non fosse in linea retta, ma presentasse salienti e rientranti, i cui angoli fossero costanti e tutti uguali fra loro, e le capitali parallele, la medesima verità sarebbe inalterata. Infatti chiamando 2α l'angolo costante di ciascun dente e di ciascuna tanaglia; essendo α l'angolo che ogni capitale fa con ogni faccia: ai salienti accadrebbe compenetrazione, e quindi elisione di parti dal limite del *dettaglio esterno* al limite dell'*interno*, e perciò diminuzione del solido in tal luogo: ai rientranti poi accadrebbe il contrario, cioè, accrescimento dal limite dell'esterno al limite del dettaglio interno *(Fig. 1)*: e ciò si renderà più chiaro riflettendo su tale figura 1ª che la linea *aaa* rappresenta la magistrale: *bbb*, il limite del *dettaglio interno*: *ccc*, il limite del *dettaglio esterno*: e *ddd* il ciglio della *controscarpa*, *ggg* il viaggio del centro di gravità della sezione del riempimento $g'g'g'$, il viaggio del centro di gravità della sezione del fosso. E la ragione sufficiente mostra che sarebbero ridotti a solidi compresi tra facce parallele; per la qual cosa, ciò che verrebbe a diminuire nei salienti, verrebbe ad aumentare nei rientranti; e l'equilibrio sarebbe rimesso nella totalità. Ma non si può adottare questo sistema nel fatto, salvo qualche rarissima volta; e delle capitali, per caso rarissimo, due si troveranno da essere parallele fra loro; e degli angoli anche rarissime volte due saranno uguali fra loro: 2° laonde possiamo tutt'al più aggiungere il seguente principio (che noi contrassegneremo con...... (a)). Se la somma dei rientranti, paragonata a quella dei salienti, potrà presentare una differenza lieve negli angoli che fanno i rami dell'opera; l'esattezza dell'applicazione

del teorema di Guldino, quantunque non sia matematicamente vera, si potrà ritenere per tale: 3° in ultimo osserveremo che il volume del fosso può bene essere considerato al saliente di un trinceramento come un solido di rotazione, ma al rientrante, non lo si può tale riguardare; giacchè la sezione che noi vorremmo supporre girasse intorno al vertice del labbro esterno del fosso, va aumentando fino alla capitale, e da questa in poi va diminuendo a misura che su quel vertice seguitiamo a supporre che girasse il piano verticale che dà la sezione del fosso. Ed il riempimento poi, nè al saliente, nè al rientrante dà un solido di rotazione, nè un solido decomponibile in altri semplici di rotazione; poichè al saliente si ha elisione, al rientrante, prolungamento di sezione. Nè sono decomponibili in solidi prodotti da sezioni costanti, che percorrano costanti linee col loro centro di gravità. Dunque in conclusione il metodo finora tenuto e quelli fondati sullo stesso principio e svolti colle stesse norme, non possono essere che inesatti, perchè mancano dei tre punti fondamentali che finora abbiamo veduti, che renderebbero ammissibile l'applicazione del teorema di Guldino. E se danno approssimazione, la è molto lontana dal vero; e tollerabile solo pei riguardi dovuti allo stato di guerra dimostrato nel precedente § 3.

5. Facciamoci ora ad esaminare la soluzione della quistione che da taluni è stata vestita dell'importanza e dell'esattezza delle calcolazioni matematiche, e su cui da tali altri si fonda un'importante inchiesta; per le quali cagioni abbiamo qui voluto farne quell'esame ch'è permesso nelle scienze e nelle lettere, in cui ogni cosa che può essere dimostrata, e che per tale si presenta; può con tutto agio essere scrutata e discussa. E perchè non si trovi in flagranti contraddizioni con la ragione, uopo è fissare costante la sezione generatrice in tutto il suo viaggio, od almeno fra dati limiti; e bisogna supporre altresì anticipatamente che la somma dei rientranti rispetto a quella dei salienti sia o uguale o per pochissimo diversa, in modo che vi sia un equilibrio tra il materiale in più di alcuni siti, e quello in meno di altri: ed adotteremo perciò con sufficiente esattezza il metodo del Guldino (vedi § 4.., (a)).

*6. Sia dunque (*Fig. 2*)... (*).

A^a	la sezione generatrice del parapetto
B^a	la sezione generatrice } del fosso
x	la larghezza superiore } del fosso
y	la profondità } del fosso
g	il viaggio del centro di gravità di A^a
g'	il viaggio del centro di gravità di B^a
S	il volume del cavamento
R	il volume del riempimento
α	l'angolo della scarpa del fosso col suo fondo, e che per brevità e semplicità metteremo uguale anche a quello che la controscarpa fa collo stesso fondo
$\frac{1}{m}S$	l'eccesso di S su di R, od il rapporto tra lo sterro ed il rinterro.

Essendo le sezioni costanti nelle lunghezze g e g', si dovrà avere

$$\left.\begin{array}{l} R=g\,A^a \\ S=g'B^a \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Ed essendo $\frac{1}{m}$ il rapporto tra R ed S; cavando S=R si avrà in conseguenza

$$R=S+\frac{1}{m}S=S\left[\frac{m+1}{m}\right]$$

e l'equazione di condizione che accompagna le (1) sarà

$$R=S\left[\frac{m+1}{m}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

(*) Ciò ch'è chiuso tra gli asterischi è quello che fedelmente abbiamo tratto da una nota al Savart (Fortificazione) qualche schiarimento, al passaggi delle formole e dei calcoli, è stato da noi aggiunto nell'idea di render rapida al massimo modo la lettura, la mercè del facilissimo intendimento. *L'autore.*

Nella prima delle (1) ponendo per R il suo valore (2) si avrà

$$S\left[\frac{m+1}{m}\right]=gA^2$$

nella quale ponendo per S il suo valore tolto dalla seconda delle (1) si otterrà

$$gA^2=g'B^2\left[\frac{m+1}{m}\right]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

donde si ha risolvendo l'equazione rispetto a B^2

$$B^2=\frac{gA^2}{g'\left[\frac{m+1}{m}\right]}=\frac{g}{g'}A^2\frac{1}{\frac{m+1}{m}}=\frac{m}{m+1}A^2\frac{g}{g'}$$

ovvero segneremo

$$B^2=\frac{m}{m+1}A^2\frac{g}{g'}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ma B^2 è la superficie della sezione del fosso, ch'essendone x l'ampiezza, y la profondità, α l'angolo che tanto la scarpa quanto la controscarpa fanno col fondo del fosso sarà *(Fig. 2)*.

$B^2=xy-\frac{1}{2}y\,(ab+a'b')$ indicando con ab ed $a'b'$ le basi delle scarpe;

ma $ab=a'b'$; quindi $B^2=xy-\frac{1}{2}y.2ab$;

ovvero

$$B^2=y\,(x-ab);$$

ma i due triangoli yab ed mnb in cui bm è il raggio 1 del cerchio, mn è il seno dell'angolo α, bn n'è il coseno: si ha $ab:bn::y:mn$ donde $ab=\frac{bn}{mn}y=y\,\text{cotang}\,\alpha$ (e per più chiarezza) $ab=y\,\text{cotang}\,\alpha$; sarà quindi sostituendo ad ab il suo valore

$$B^2=y\,(x-y\,\text{cotang}\,\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Eguagliando dunque i valori di B^2 per le (4) e (5) sarà

$$y\,(x-y\,\text{cotang}\,\alpha)=g\frac{A^2}{g'}\left(\frac{m}{m+1}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Sia ora

$$g'-g=n;\quad \text{epperò}\quad g'=g+n;$$

avremo:

$$y\,(x - y \text{ cotang } \alpha) = \frac{mA^2}{m+1} \cdot \frac{g}{g+n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Ed ordinando l'equazione rispetto ad x si avrà

$$x - y \text{ cotang } \alpha = \frac{mA^2}{y(m+1)} \cdot \frac{g}{g+n}$$

donde si ha

$$x = y \text{ cotang } \alpha + \frac{m}{y} \cdot \frac{A}{m+1} \cdot \frac{g}{n+g} \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Supponendo quivi nota la y e la n, si conoscerà bensì la x, che è appunto il caso più comune della pratica di guerra; giacchè l'equazione (a) che in y è di 2° grado ed in x di primo, col più semplice dei due calcoli fa giungere alla desiderata risoluzione della quistione. Oltrecchè riesce meglio rimaner variabile la larghezza; chè fatta la prima minore si può sempre aumentare; anzi che la profondità, attesa la difficoltà maggiore dell'esecuzione: ragione la quale ha dato agio a toccar di volo il prudente consiglio di restarsi alcun poco al disotto del bisognevole per non recare eccedenza. E quantunque si potesse obiettare, forse giustamente, che non sempre si avrà permissione dal nemico di ricominciare un taglio di terra per fornire il riempimento; pure noi risponderemo accennando a quello con cui concludevamo il § 2: e dippiù benchè riesca il trinceramento alquanto più basso di quello ch'è mestieri per la difesa; generalmente parlando può subito e facilmente esser messo in ordine dai difensori da ottenerne infine sempre un braccio di leva che aumenti le loro forze contro gli aggressori. E certamente poi tra le due è meglio esser sorpreso sul piano della campagna o così presso, che dentro il fondo del fosso dal nemico.

*7. Risolviamo ora la (A) rispetto ad y per trarne delle conseguenze: si avrà in prima

$$y^2 \text{ cotang } \alpha - xy = -\frac{mA^2 g}{(m+1)(g+n)}$$

chiamiamo q il 2° membro di questa, e sarà

$$y^2 \text{ cotang } \alpha - xy = -q\,;$$

donde

$$y^2 - x\tan\alpha y = -q\tan\alpha ;$$

ed infine

$$y = \tfrac{1}{2}\tan\alpha x \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\tan^2\alpha x^2 - q\tan\alpha}$$

ovvero

$$y = \tfrac{1}{2}\tan\alpha \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\tan^2\alpha x^2 - 4q\tan\alpha}$$

$$= \tfrac{1}{2}\tan\alpha \pm \tfrac{1}{2}\tan\alpha \sqrt{x^2 - \frac{4q}{\tan\alpha}}$$

ed infine

$$y = \tfrac{1}{2}\tan\alpha\left(x \pm \sqrt{x^2 - 4q\,\mathrm{cotang}\,\alpha}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

L'equazione (b) dà la profondità quando è nota la larghezza del fosso e la quantità $n = g' - g$, ricordandoci di aver messo

$$q = \frac{mA^2g}{(m+1)(g+n)},$$

la qual cosa mediante la proprietà dei triangoli simili si può agevolmente ottenere, giacchè g e g' sono parallele e di nota posizione.

*8. Interpretiamo intanto ciò che il calcolo ne dice.

In primo luogo quando $x^2 < 4q\,\mathrm{cotang}\,\alpha$ ovvero

$$x < 2\sqrt{q\,\mathrm{cotang}\,\alpha} : y$$

è immaginario, cioè, che le scarpe si dovrebbero compenetrare, e vale a dire che la larghezza è troppo angusta, onde le scarpe s'incontrano ad un' altezza minore di quella che rende a B^a il valore richiesto nelle (1); laonde bisognerà aumentare la larghezza x già data, e che si dovrà cavare dall'equazione di condizione

$$x^2 = 4q\,\mathrm{cotang}\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

che darà il limite inferiore della x

2° Allora la (b) diverrà $y = \frac{1}{2}\tan\alpha x$; e per esservi la (c) presente, sarà

$$y = \tfrac{1}{2}\tan\alpha 2\sqrt{q\,\mathrm{cotang}\,\alpha} = \tan\alpha\sqrt{q\,\mathrm{cotang}\,\alpha};$$

infine

$$y = \sqrt{q \tan g \alpha}.$$

Laonde il fosso prenderebbe forma di triangolo isoscele colla base sopra; e congiungendo il vertice col punto medio di tal base si avrebbe x in funzione della tangente, ed y della cotangente. Tal forma di fosso è assai raccomandata dal Foissac; ma ripetiamo, difficilmente in pratica si può ottenere, specialmente nelle occasioni tumultuarie.

3° Del doppio segno del radicale, bisogna prendere il negativo, prima, perchè la y facendosi la massima, potrà eccedere la grandezza convenevole al maneggio delle terre; poi pel tempo che diviene maggiore a misura che aumenta lo sterro e il lavoro corrispondente; in terzo luogo per la quantità del cavamento che ha un limite; giacchè al crescere d'y deve diminuire x per mantenere l'equilibrio di esse due quantità per dar costantemente B^2 di cui sono le dimensioni, e B^2 si sa esser data dalla (1).

Con tali metodi cioè, o fissando prealabilmente la y si cava la x, o viceversa; si risolve la quistione di aver tanto sterro quanto ne necessita pel riempimento. Per la qual cosa giusta le dimensioni data e quelle ricavate, si segnerebbe la larghezza e si caverebbe il fosso a quella profondità mediante i metodi pratici che già sono considerati nell'esecuzione dei lavori nella fortificazione. E si ricordi frattanto di essere venuti a tal determinazione partendo dai principii definiti nel § 5; oltre di che non essendo nota la grandezza del fosso, ovvero la sua sezione, non si può determinarne il centro di gravità; quindi della quantità $n = g' - g$ non può ottenersi valore definito; e si suppone fra i limiti conosciuta la g'; laonde per n si ha un valore più o meno ravvicinato, ma sempre differente del vero.

*9. Che se poi si dovesse costruire uno spalto bisognerebbe tener conto dello sterro, del riempimento e del loro rapporto $\frac{1}{m}$. Si avrebbe allora la somma delle sezioni del parapetto e dello spalto, chiamando intanto C^2 la sezione di questo e g'' il

viaggio del suo centro di gravità; e invece dell'equazione

$$A^2g = B^2g'\left(\frac{m+1}{m}\right)$$

dovrebbe porsi

$$A^2g + C^2g'' = B^2g'\left(\frac{m+1}{m}\right):$$

e si farebbe altrettanto per le terre che abbisognassero per le barbette, per le rampe, per le traverse, ecc., portando l'aumento sulla larghezza e sulla profondità del fosso: e si porrebbe in equazione il novello quesito, chiamando D il loro volume, o la somma dei loro volumi; ed avremmo

$$A^2g + C^2g'' + D = B^2g'\left(\frac{m+1}{m}\right).$$

Che se un sol fosso si stimasse troppo grande, e sì perchè gli operai non potessero giungere a maneggiar le terre; e sì perchè infine non potessero moltiplicarsi le partite, e per mancanza di braccio, e di spazio; e da ultimo se il suolo ad una data distanza orizzontale o verticale non desse terreno, ma bensì fango, e acqua, o tufo, o roccia, ecc., si farebbe un taglio a piè dello spalto formando un avanfosso, come si è veduto in fortificazione; e il metodo del calcolo sarebbe sempre della stessa natura del precedente.

*10. Guardando la cosa come l'abbiamo presentata; cioè che la sezione si mantiene costante fra limiti, che gli aumenti poco differiscono dalle diminuzioni, e infine che la somma dei salienti presenta agli angoli una certa compensazione con la somma dei rientranti; la quantità $n = g' - g$ svanisce quasi, perchè gli allungamenti del fosso ai salienti sono in certo modo controbilanciati dagli allungamenti del riempimento nei rientranti; ma nei ridotti, nelle lunette, nei bastioni, insomma in tutte quelle forme che i salienti predominano, non si potrà annientare la n; e prendiamo p. e. un quadrato: g' sarà sempre maggiore di g, i salienti sono ritondati nel fosso; epperò chiamando q la lunghezza del limite esterno del dettaglio, e supponendo che g' passi per la metà della larghezza del fosso in tutto il suo sviluppo; si vede bene che g' è uguale a questa q

più gli archi che sono intorno ai salienti descritti con raggio $\frac{1}{2}x$; ma tutti a quattro essi formano la circonferenza di un cerchio di raggio $\frac{1}{2}x$; quindi essendo $2\pi R$ la espressione di quella, si ridurrà nel caso nostro πx; e sarà $g'=q+\pi x$ allora si ha pure $n=q+\pi x-g$ che nella (a) darebbe x in funzione della sola y; e nella (b) y in sola funzione di x; ma questo sempre supponendo che g' passi per la metà della larghezza: e dippiù sarebbe un caso eccezionale del solo quadrato, ove si è potuto stabilire $n=q+\pi x-g$; ma nelle altre figure questo recherebbe grande imbarazzo.

Ci sembra pur troppo chiaro come possa convincersi ognuno che il fondamento di tal calcolo è stabilito su più cose che bisognerebbe ottenere con esattezza affin di mettere in corrispondenza del procedimento nella determinazione d'x e d'y, tutto l'andamento del calcolo: quindi non a torto ci avvisavamo quando accennavamo dell'approssimazione delle valutazioni rivestite dell'esattezza. Della quale esattezza per altro noi non andiamo in cerca pei bisogni della guerra; e già ne abbiamo tenuto di scorso.*

III.

11. Eccoci ad esporre un sistema della valutazione dei solidi di opere di fortificazione fatte con terra battuta; ed a scanso di equivoci intenderemo fin dal principio, che noi riteniamo tanto applicabili alla guerra le seguenti norme, quanto si potrebbe concepire, dopo la dimostrazione fatta al § 3, delle formole rigide di matematiche in tempi cotanto agitati. Solo crediamo che, senza forze nell'agio della pace e per le opere permanenti, le si potrebbero adoperare con qualche vantaggio; ed ancora oseremmo di aggiungere che per taluno che le si rendesse familiari, talvolta nelle opere eventuali citate in terzo luogo del § 3 istesso (pag. 6) potrebbero tornare di qualche utilità.

Sia ABCD *(Fig. 32)* un'opera di fortificazione formata da salienti e rientranti: *abcd* il corso della magistrale; *a'b'c'd'* quello del dettaglio esterno; *a''b''c''d''* quello dell'interno.

Sia tolta a considerare la porzione BCD che forma saliente. Dall'incontro del dettaglio interno $b''c''d''$ e della capitale $Rc''cc'C$ si abbassino sulla magistrale le perpendicolari $b'f''$ e $b'f'''$: e si faccia altrettanto dal punto B su di *abcd*.

Il solido compreso tra i piani verticali che hanno per traccia $c''f$ e $b'f'''$ se mantiene costante la sezione in tutto il suo corso da $b'f'''$ a fc'', col teorema, di Guldino è esattissimamente calcolato: ma se non la mantiene tale, si dividerà in tante parti, per quante variazioni offre la sezione normale alla magistrale (ch'è il profilo) e fra queste lunghezze delle fatte divisioni sarà agevole calcolarlo con esattezza.

Si tratta ora di sottoporre a leggi irreprensibili di calcolo i volumi le cui piante sono $fc'f'c''$; $f''b'f'''b''$; $gBg'b'$.

Il solido che ha per pianta $c'fc''f'$ è il più complicato, giacchè il secondo ed il terzo non presentano che soli allungamenti di parti, e non già come il primo allungamento da un canto, e, per elisione (proveniente da una evitata o ideale compenetrazione di parti) raccorciamento di parti dall'altro canto. Per le quali cose se giungeremo a fissare alcuna cosa di saldo pel primo; sarà meno faticoso estenderla fino agli altri due.

In primo luogo il piano verticale che passa per $Cc'cc''$ lo divide in due parti che per brevità supporremo uguali, ma se ciò non fosse non turberebbe il procedimento come vedremo. La sezione che tal piano produrrà nel solido è una derivata del profilo generatore che passa per $c''f$: e siccome dalla sezione $c'cc''$ abbassando quante perpendicolari si vogliono sulla $c''f$ queste riescono sempre parallele $c'f$, ci'', ecc., così si può ben intendere esser la sezione $c'cc''$ proiettata su di $c''i''if$ e l'angolo di proiezione, chiamandolo φ, si ricava dalla relazione $90^\circ - \alpha = \varphi$, essendo 2α l'angolo al saliente $b''c''d''$.

Se dunque diciamo m la sezione del profilo generatore, n la sezione in capitale, ovvero quella che ha per traccia $Rc''cc'C$; sarà, per le note cose delle proiezioni in geometria analitica, $m = n \cos\varphi$ donde

$$n = \frac{m}{\cos\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (v)$$

12. Or si faccia girare il piano verticale $c''C$ intorno al pun-

to c'', si vede che a misura che si avvicina al profilo $c''f$ l'angolo φ diminuisce, ed n si accosta ad essere uguale ad m, finchè sia $\varphi=0$ diverrà $\cos\varphi=1$ ed $m=n$. Ed a misura che n si allontana da m, va crescendo l'angolo φ, il suo coseno va mettendosi al disotto sempre dell'unità, la frazione $\frac{m}{\cos\varphi}$ va crescendo di valore; e la sezione $c'c''$ va crescendo ancora fino all'infinito, il che vuol dire che la capitale si trova all'infinito, ovvero che non v'è angolo più, e che il parapetto è in linea retta. Ma fra i limiti di $\varphi=0$ e di $\varphi=90^\circ-\alpha$ noi possiamo avere tutte le gradazioni dell'accrescimento di n o delle sue variazioni infinitesime: la qual cosa importa che noi possiamo ottenere la differenziale della sezione $c'c''$; quindi riguarderemo la φ variabile, e differenzieremo la (v) rispetto a φ ed n; e avremo

$$d.n=m.\frac{-d.\cos\varphi}{\cos^2\varphi}=-m.\frac{d.\cos\varphi}{\cos^2\varphi};\ \text{ma}\ d.\cos\varphi=-d\varphi\,\text{sen}\,\varphi;$$

quindi

$$dn=m\frac{\text{sen}\,\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi};$$

dunque avremo integrando

$$n=\int_{\varphi=0}^{\varphi=90^\circ-\alpha}\frac{m.\text{sen}\,\varphi}{\cos^2\varphi}.d\varphi+C=m\int_{\varphi=..}^{\varphi=...}\frac{\text{sen}\,\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi}+C.\quad . \quad . \quad (v)$$

13. Se ora dal punto c'' intendiamo menate $c''h$, $c''h'$ ecc. infinitamente vicine tra loro, ovvero che le fh, fh', fh'' ecc., sieno degli infinitamente piccoli, ed intendiamo che per esse $c''h$, $c''h'$, ecc., passino dei piani verticali; il solido proposto resterà diviso in tanti solidi di grossezza infinitesima, e che avranno per base i triangoli $c''fh$, $c''hh'$, ecc. Tutte le sezioni $c''h$, $c''h'$, ecc. hanno il loro centro di gravità sulla stessa linea retta parallela alla magistrale, e la cui proiezione orizzontale potremmo esprimere con l'equazione $y=f, x$ di primo grado. E dippiù il centro di gravità della sezione CR dovrà avere per proiezione il centro di gravità del profilo; dappoichè se ben si consideri che cosa in sostanza voglia dir proiezione di una superficie, o d'una retta, o di ec... ci sembra che sia quella

che abbia i suoi punti al piè delle perpendicolari abbassate dai punti omologhi della proiettante sul piano della proiezione, e le parti omologhe delle due per conseguenza circoscritte dagli estremi di queste perpendicolari; quindi il centro di gravità della sezione proiettata deve avere il suo omologo nel centro di gravità della sua proiezione. Or noi abbiamo che l'angolo φ varia, e la proiezione della sezione n è sempre m; quindi in tutte le posizioni da $\varphi=0$ a $\varphi=90^\circ-\alpha$ che può occupare la sezione proiettata n, il suo centro di gravità avrà per omologo il centro di gravità della sua proiezione. Ma le sezioni $c''h$, $c''h'$ ec. sono appunto queste sue varie posizioni; dunque le dette sezioni hanno il loro centro di gravità nella retta parallela alla magistrale, perpendicolare alla sezione $c''f$ e proiettata nella ii' ch'è appunto una perpendicolare elevata dal punto i su di $c''f$, proiezione del centro di gravità della sezione $c''f$.

Il punto i' sarà la proiezione pertanto del centro di gravità della sezione n. Ed un piano verticale che passasse per questa retta congiungente dei due centri di gravità avrà per traccia orizzontale la ii' parallela alla magistrale.

Chiamiamo adunque x la lunghezza ii' perchè luogo geometrico delle proiezioni orizzontali del centro di gravità d'ogni sezione $c''h$, $c''h'$, $c''h''$... ec., chiamiamo p la $c''i$, perchè nota: la x sarà data dall'equazione $x=p\tang\varphi$; da questa equazione differenziando rispetto ad x, e φ, si ha:

$$dx=p.d.\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}=p\operatorname{seg}^2\varphi d\varphi,$$

cioè

$$dx=p\operatorname{seg}^2\varphi.d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{v}')$$

14. Ora il solido generato dalla sezione variabile n della (u) che si muove col suo centro di gravità lungo la ii'' sarà dato quindi in volume dal moltiplicare la sezione per lo elemento dx. Epperò il solido generato nel totale movimento sarà dato dalla stessa sezione moltiplicata per l'integrale dell'elemento dx; cioè sarà per ogni solido parziale

$$m\int_{\varphi=0}^{\varphi=A}\frac{d\varphi\operatorname{sen}\varphi}{\cos^2\varphi}.p.\int_{\varphi=0}^{\varphi=A}d\varphi\operatorname{seg}^2\varphi,$$

ed il solido cercato, chiamandolo V, avrà ger espressione

$$V=mp\int \text{seg}^2\varphi d\varphi \int \frac{\text{sen}\,\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

ma in questo caso l'integrale si deve estendere la $\varphi=0$ a $\varphi=90^\circ-\alpha$, dunque sarà:

$$V=pm\int_{\varphi=0}^{\varphi=90^\circ-\alpha} \text{seg}^2\varphi\, d\varphi \int_{\varphi=0}^{\varphi=90^\circ-\alpha} \frac{\text{sen}\,\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (u')$$

Se s'abbia difficoltà di ammettere tal calcolo, possiamo fare che in meccanica (V. Venturoli, libro 1°, Capo XI, proposizione 3ª) è dimostrato che la sezione moltiplicata pel viaggio del centro di gravità dà il volume del solido, senonchè colà la sezione è supposta costante, e che si faccia una rotazione. Ora la difficoltà è appunto quella che la sezione non si mantiene costante, quantunque si faccia la rotazione intorno al punto c'', giacchè a ciascuno istante di questo viaggio di esso centro la sezione varia; ma riflettendo che tale variazione, o l'incremento ch'essa riceve ad ogni istante del suo movimento, è calcolato, e se ne tien conto, moltiplicando il viaggio del centro di gravità della nostra sezione per essa medesima presentata coll'incremento che riceve; è come se si mantenesse costante; ed infatti noi non troviamo ammessibile il teorema di Guldino nel caso dei parapetti in disamina, perchè si commette errore nella sezione; trascurando la variazione cui va soggetta. Ora adunque che col mezzo indicato si può ottenere per ogni elemento del viaggio del centro di gravità, la sezione col suo incremento a quel punto istesso, è come se non accadesse variazione alcuna. Quindi se in ogni istante della generazione dei solidi parziali può con esattezza ammettersi; la stessa esattezza reggerà nel solido totale. Possiamo quindi mettere per dimostrato che se la sezione non si mantenga costante nella generazione di un solido la mercè del viaggio di quella, ma che invece varii e si tenga conto della sua variazione; regge sempre l'esattezza dell'applicazione del teorema indicato. Integriamo ora la (u') effet-

tivamente; epperò richiamandola e riducendola essa diviene

$$V = mp \int_{\varphi=0}^{\varphi=90^\circ-\alpha} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=90^\circ-\alpha} \frac{\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi} + C$$

l'integrale della prima parte è $\operatorname{tang}\varphi$; e l'integrale della seconda vuole esser trattato con qualche attenzione.

Noi abbiamo $\int \frac{\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi}$ da integrare ora a similitudine della formola

$$\int u dv = uv - \int v du$$

facciamo

$$\operatorname{sen}\varphi = u\,,\ \text{e}\ dv = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

donde

$$\int \operatorname{sen}\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{tang}\varphi - \int \operatorname{tang}\varphi . d\varphi . \cos\varphi$$

ma per essere $\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}$, il terzo termine diverrà

$$\int \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\,;$$

ma noi sappiamo che l'integrale di questa funzione semplice è $-\cos\varphi$; dunque sarà;

$$\int \frac{\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi} = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{tang}\varphi + \cos\varphi + C.$$

La costante C può trascurarsi essendo 0 il limite inferiore di φ, il quale or ora vedremo quali limiti se gli convengano: e dippiù fatto nel volume V, $\varphi = 0$ va tutto a zero: esso volume resterà dunque espresso da

$$V = mp \operatorname{tang}\varphi (\operatorname{sen}\varphi \operatorname{tang}\varphi + \cos\varphi)$$

in cui fatte le riduzioni semplicissime che comporta diviene in primo luogo

$$V = mp \operatorname{sen}\varphi (1 + \operatorname{tang}^2\varphi)$$

ma

$$1 + \operatorname{tang}^2\varphi = \operatorname{seg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

sarà

$$V = \frac{mp \operatorname{sen} \varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

E seguitando a ridurre, verrà finalmente l'espressione semplicissima, cui può facilmente essere applicato il calcolo logaritmico:

$$V = \frac{mp \operatorname{tang} \varphi}{\cos \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (M)$$

donde

$$\begin{aligned} \log. V = & \log. m \\ & + \log. p \\ & + \log. \operatorname{tang} \varphi. \\ & - \log. \cos \varphi. \end{aligned}$$

Questo è il tipo del calcolo in cui non abbisogna per l'angolo φ l'introduzione del raggio r, com'è considerato in trigonometria; giacchè l'unità lineare con cui sarà valutata la p è la stessa di quella che serve a valutar la sezione m, e perciò fatto $r = 1$, tanto la tangφ quanto il coseno φ saranno valutati col raggio 1 identico all'unità lineare prescelta; cioè cosφ a tangφ saranno le frazioni che affetteranno il prodotto con mp per dare il solido richiesto. Anzi sia questo motivo di far ripruove del metodo già esposto; infatti, moltiplicando la sezione m per una quantità lineare p, si otterrebbe un prisma a basi parallele, maggiore senza dubbio del solido richiesto; ma le frazioni tangφ e cosφ lo diminuiranno del competente quantitativo per dargli il valore di cui si va in traccia.

15. Nella integrazione della funzione V si è veduto che la prima parte dell'integrale è risultata semplice per esser la sommatoria degli elementi semplici; ma la seconda non già: quindi sarebbe stato fin da principio esatto l'integrare la sola seconda parte e moltiplicarla per $p$tangφ; la qual quantità altro non è che il viaggio del centro di gravità; viaggio che non ammette variazione veruna nel suo cammino rispetto al punto i o al punto i', e vale a dire che si mantiene parallelo alla magistrale, ed è uguale alla sua proiezione ii'. Egli è pure indubitato che, le sezioni aumentando a misura che si discostano dalla $c''f$; il centro di gravità di loro deve cangiar qualche cosa

nella sua novella proiezione rispetto alla primitiva; ma osservando la loro proiezione nei punti n, n', n'', ec. le congiungenti nc'', $n'c''$, $n''c''$, rappresentano le proiezioni delle distanze di essi dal punto c''; epperò le rette effettive vanno aumentando di momento effettivamente ad ogni istante; ma rispetto al punto c'' e non rispetto ad i; laonde l'aumento esiste nelle varie posizioni consecutive dei centri di gravità successivi: or facendo passare per la retta percorsa da questi centri, e pel punto c'' un piano di proiezione, e ponendo nel punto c'' l'origine delle coordinate; destinando la $c''C$ per asse delle x; i punti $nn'n''i'$ possono essere dati dall'equazione della linea retta $y=ax+b$.

16. Prendiamo ora a notare alcune interessanti proprietà della formola (M) trovata.

In Fortificazione è stato assegnato per limite massimo degli angoli 120°: e per minimo 60°. Ora essendo $\varphi=90-\alpha$ e rappresentando con 2α il saliente; avverrà, che nel limite massimo $\alpha=60^\circ$, quindi $\varphi=30^\circ$; e nel limite minimo $\alpha=30^\circ$; quindi $\varphi=60^\circ$.

Questo dimostra che più aprendosi il saliente, più piccolo è il solido da calcolare; e viceversa più stringendosi, maggiore diventa. Nel caso del saliente ad angolo retto $\varphi=90^\circ-45^\circ=45^\circ$ la $\tang 45^\circ=1$; il suo logaritmo è zero; quindi potendo ottenersi la maggior parte dei salienti ad angolo retto, (i rientranti lo debbono assolutamente essere per limite inferiore) è vantaggioso al calcolo giacchè $\log.\tang 45^\circ=0$, $\log 45^\circ$ essendo uguale a $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ nel calcolo, sotto ai logaritmi di p e di m si scriverà negativo $\frac{1}{4}\log.2$ ch'essendo 0,5010300 risulterà 0,0752575 e per brevità 0,0753 o più breve 0,075.

17. Crediamo superfluo additare il mezzo per calcolare la m ed anche la p; e per quest'ultima ricorderemo di far passare il piano dei momenti per la sezione $c''f$; porre in c'' l'origine delle coordinate; calcolare le superficie parziali di cui si forma la m, e di ciascuna il centro di gravità per avere la distanza da esso centro a c''; e poi ricordarsi infine essere la p

corrispondente alla X (Venturoli, capo 6°, libro I) la quale si esprime

$$X=\frac{Px+P'x'+P''x''+\ldots}{P+P'+P''+\ldots}.$$

E faremo notare altresì che le variazioni dei profili si potrebbero, com'è facile, tutte notare; accanto delle quali si potrebbero disporre in corrispondenza le varie superficie m, e la coordinata p o X del centro di gravità. Allora non rimarrebbe che il solo φ variabile, di cui pure le principali grandezze si potrebbero notare; e in corrispondenza la tangente ed il coseno: ed allora per lo più i calcoli si ridurrebbero ad una semplice addizione, più al ritrovamento del numero corrispondente alla somma logaritmica ottenuta.

Questo è quanto concerne il primo solido: vediamo ora il secondo.

18. Il secondo solido proposto è quello al rientrante del riempimento. Ed osserveremo che il profilo, che dà il piano la cui traccia orizzontale è $b'f''$ è la proiezione della sezione data dal piano $b'b''$; epperò il solido racchiuso tra questi due piani darebbe luogo all'applicazione della formola (v), (u), (v'), (u') ed (M) poichè essendo l'angolo di proiezione $b''b'b'''=90°-\alpha'$; chiamandolo φ': sarà $\varphi'=90°-\alpha'$; e le due sezioni essendo m ed n' o m' ed n'; sarà pure $m'=n'\cos\varphi'$; e verrebbesi ad aver perfettamente la stessa formola (M) in cui m e p in molti casi resterebbero fermi (cioè dalla sezione costante) o sarebbero surrogati da m' e p', e φ sarebbe surrogato da φ': senza alcuna difficoltà.

In quanto al fosso la parte ch'è al saliente, trova esatto calcolo nel teorema di Guldino; e quella, ch'è al rientrante, (e ch'è il terzo solido proposto) può bene col testè esposto metodo esser calcolata; poichè la sezione $Bl'lg'$ può intendersi, anzi è la proiezione della sezione $Bg''g'''b'$: e nella (M) si porrebbe per p la p''; per m, la S (la sezione del fosso); per φ, φ'' uguale $90°-\alpha''$, che ha per limite massimo $60°=\frac{120°}{2}$, e per minimo $\frac{90°}{2}=45$ giusta i principii della fortificazione.

Rimane ad aggiungere che noi finora abbiamo calcolata una parte di ogni solido, la seconda parte poi dà luogo a due casi, se il secondo ramo o il consecutivo mantenga le istesse dimensioni; si vede che raddoppiando i valori di (M) si ha tutto il solido, giacchè allora deve esser diviso in parti uguali dal piano che passa per la capitale. Se non lo mantiene costante, la differenza è così piccola che si rende trascurabile; e le rette ci'' e le altre al disopra del suolo parallele a ci'' sono tanto poco differenti dalla perpendicolare, che si possono avere per tali: ad ogni modo poi l'errore in meno che si commetterebbe, potrebbe ben valutarsi; che si avrebbero dei lievissimi prismi tagliati a basi non parallele, uno dei quali sarebbe $ci''c''i''i'''c''c$, che con molta approssimazione al vero può mettersi tutto al più uguale ad $\frac{1}{300}$; sicchè in 30 solidi darebbero $\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$, che resta assorbito sempre nel maneggio del lavoro.

Ma osserveremo ancora più che, quando le opere debbono presentare qualche differenza significante di comando tra due rami consecutivi, lor si fa un innalzamento nel secondo ramo, o consecutivo lungo tutto lo sviluppo della magistrale di esso ramo: e spesso si fanno ai salienti le così dette berrette o *bonnettes* (francese); sicchè non si presenta che di rado, o nelle operazioni rapide, o in qualche lieve raccordamento in riguardo al pendìo, o a qualche accidente del terreno posto innanzi, tale caso di differenza: ed allora si vede chiaro che l'errore si commetterebbe o nel caso della stringente fretta (§ 3) o una o due volte al sommo, divenendo tutto al più $\frac{3}{300}=\frac{1}{100}$, sicchè per dare 1^{m^3} di errore il volume dovrebbe ascendere a $100^{m^3},00$; cosa che tocca l'impossibile per 1 o 2 salienti, e foss'anco 3.

Del resto nelle facce che il profilo generatore non si mantiene costante pei raccordamenti; si dividerebbe in quelle lunghezze che si mantiene costante, e prendendo un medio dei valori, si noteranno le differenze prime e le differenze seconde. Prendendo un medio delle differenze seconde, si potrà argomentare della picciolissima quantità di cui la X del centro di gravità d'una di esse dovrebbe essere aumentata o diminuita; e fattolo, si

potrebbe procedere all'applicazione del teorema di Guldino. Si separerebbero i solidi ai salienti ed ai rientranti, e si procederebbe alle solite calcolazioni esposte.

19. Con questo metodo si può calcolare ancora il volume di un solido prismatico retto od obliquo qualunque, ed anche di quelli che avessero una delle facce non piane, ma che ammettesse una generatrice rettilinea, sia nella lunghezza, sia nella larghezza; dappoichè si dividerebbe in due solidi nella foggia che abbiamo veduta (M). Che laddove il profilo variasse lungo il solido; si dividerebbe prima in quelle parti, che le differenze dei profili rendonsi sensibili; e per le parti intermedie comprese dalle divisioni, i cui profili sarebbero insensibilmente disuguali fra loro, si procederebbe col metodo (M). In tal maniera si ovvierebbe, per la semplicità della (M) al procedimento tenuto per lo migliore in esattezza proposto dagli scrittori di costruzione, ecc. (V. Cavalieri, Architettura Statica e Idraulica lib. 5°, cap. III, § 983, 84, 85 e 86) (Savart, nota di Scarambone) ecc.: e del qual metodo daremo l'enunciato e la formola finale, dispensandoci dal riprodurre le operazioni geometriche ed algebriche intermedie, che conducono a quel risultato, rimanendole a sviluppare ai desiderosi; ricordandosi che la sezione è un trapezio, e le proprietà di due rette parallele che tagliate da altre le dividono in parti proporzionali; il resto lo indicherà la figura.

Epperò sia proposto di determinare il volume del solido ABCDEFH *(Fig. 4)* terminato inferiormente dalla superficie gobba trapezoidale ABCD, che figura il terreno naturale, e i cui lati AB e DC sono paralleli, limitato superiormente dall'altro trapezio EFGH, bensì di forma gobba, che dinota il pendìo del parapetto che supponiamo raccordante più sezioni di diversa altezza; e da ultimo chiuso dalle quattro facce verticali CH, CF, AH, AF delle quali le sole CH ed AF sono parallele. Or quantunque avessimo dette gobbe le superficie trapezoidali, pur tuttavia hanno una generatrice rettilinea; giacchè l'una è il piovente del parapetto, l'altra si deve fare nel taglio e riporto delle terre. Tale generatrice rettilinea si può mettere nello stesso piano della superiore, e saranno entrambe sempre nel piano verticale parallelo a CH ed a AF.

Per un punto P preso in uno degli spigoli verticali del solido s' intenda condotto un piano orizzontale PONM; ed il solido sarà diviso in due parti. Consideriamo dapprima la parte ABCDMNOP: intendiamo tagliata tale porzione di solido da un piano verticale VTZX parallelo alle facce AFCH. Nel piano NQ sia condotta a ZX la perpendicolare RQ; dessa sarà perpendicolare ad MP ed ON.

Facciamo la lunghezza RQ del solido uguale ad l, ovvero la distanza tra le due facce AF, CH.

Chiamiamo x la porzione della l compresa tra K e Q: sia X il volume che si cerca del solido AN:

$$\text{sia } DO=a,\ CN=b,\ AP=c,\ MB=e.\ NO=p,\ MP=q.$$

La sezione VZ è un trapezio i cui lati paralleli sono VX e TZ, e la cui altezza è la retta XZ, ch'è una orizzontale; epperò essendo in generale la sezione VZ espressa da

$$VZ=\frac{VX+TZ}{2}ZX \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

esprimendo queste quantità in funzione delle a, b, c, e, p, q, l, x; si otterrà per la (A) la (B)...

$$VZ=\frac{[(a+b)(l-x)+(c+e)x][p(l-x)+qx)]}{2l^2} . \quad . \quad . \quad (B)$$

Il differenziale del volume essendo dato da $VZdx$: epperò sarà

$$X=\int dx VZ:$$

e avremo

$$X=\frac{1}{2l^2}\int[(a+b)(l-x)+(c+e)x][p(l-x)+qx]dx. \quad . \quad (C)$$

Sviluppando i prodotti accennati ed integrando le varie funzioni, e riflettendo che per $x=0$, ogni funzione va a zero la costante C non abbisogna; e il limite superiore d' x per l'integrale è $x=l$.

Fatte le parziali integrazioni se ne scrive la somma; e fatte le opportune riduzioni la (C) darà

$$X=\frac{l}{12}[(2p+q)(a+b)+(p+2q)(c+e)]. \quad . \quad . \quad (D)$$

Per calcolare il rimanente pezzo del solido, ch'è la parte

MPONGHEF, rimanendo fermi nel loro significato l, p, e, q; ad a, b, c, e, si daranno i valori competenti per OH, NG, PE, MF, che saranno generalmente $a'b'c'e'$, e chiamato X' il novello solido sarà parimenti

$$X' = \frac{l}{12}[(2p+q)(a'+b')+(2q+p)(c'+e')]. \qquad (D')$$

E tutto il solido composto dalla superiore ed inferiore parte sarà

$$Y = X + X' = (D) + (D').$$

20. Questo metodo è adottabile solo per solidi prismatici di sezione quadrilatera riducibile a trapezio; ma non può applicarsi ai solidi di sezione diversa, come per cagione d'esempio un saliente, o un rientrante già esaminato; mentre la sezione m della formola (M) può esser qualunque, purchè s'introduca il logaritmo del valore numerico di quella superficie proiettata.

Dippiù paragonando gli elementi in funzione di cui è stata data la (M) con quelli per mezzo dei quali abbiamo (D'): nella (D') sono sette di non facile ritrovo, nè di semplice assegnazione; mentre nella (M) sono tre facilissimi ad assegnare, e a ritrovare; nè possono essere confusi l'uno con l'altro, e dar quindi soggetti ad errori di calcolo. Per la (D) non sono applicabili i calcoli logaritmici ad un tratto; mentre per la (M) è sì naturale e spontaneo che nulla più. Dunque?... s'aggiunga, ancora che la (D) è difficile a ritenersi a memoria; mentre la (M) è facilissima.

Ci riserberemo all'ultimo di esaminare alcune obiezioni che ci si potrebbero fare: per ora bisogna procedere all'applicazione del mentovato principio § 12, 13, 14, al calcolo dello sterro e del rinterro.

IV. RIEPILOGO.

21. Stabilite le dimensioni del parapetto e lo sviluppo dell'opera, ossia la pianta ed il profilo del riempimento da fare; bisogna assegnare la grandezza della sezione del fosso.

Chiamato R il volume del riempimento che si calcolerà col metodo da noi proposto pei salienti e pei rientranti; e col me-

todo del teorema di Guldino per le parti in linea retta; chiamato $\frac{1}{m}$ il rapporto e suppostolo $\frac{1}{10}$; si sa che dovrà tagliarsi un volume di terra pari a $\frac{9}{10}$R, facciamolo per brevità uguale ad N.

N dovrà essere il prodotto della sezione del fosso pel suo sviluppo longitudinale; il quale è dato, quantunque non sia assegnabile a priori l'altezza del solido di cavamento ch'è funzione dello sviluppo, giacchè essa altezza sappiamo per la geometria come si trovi, ma abbisognasi sempre della sezione; e d'altronde quello ch'è più rilevante pel nostro caso è ch'esso sviluppo longitudinale è inalterabile; quindi non vi si poggerà un'idea di aumento o di diminuzione; e si lascerà per conseguenza fermo fra le quattro quantità N, a, b, l chiamando con a e b la larghezza e la profondità. Interesserà dunque le due quantità a e b la ricerca nostra presente.

(Fig. 3). In primo luogo il solido del fosso di ogni ramo, dovrà rendere la terra del riempimento; e desso è limitato dai piani verticali che hanno per traccia le capitali del saliente e del rientrante. E questo solido è la somma dei tre, nel ramo BC, (i quali per brevità nomineremo con le loro facce inferiori) kCc', $kc'g'B$, $Bg'b'$. Salvo qualche rarissimo caso, di cui in fine terremo conto, di doversi far diminuire il pendìo naturale delle terre alla controscarpa del fosso per essere le terre molto leggere, e perciò la controscarpa di facile discesa: non è una necessità assoluta che la base della scarpa sia differente da quella della controscarpa, e quindi può farsi per semplicità di costruzione e di calcolo $o=n$ dicendo o l'una, n l'altra.

I tre solidi hanno per espressione, chiamando p la (x) del centro di gravità

$$\left.\begin{array}{l} Ckc'=mp\frac{1}{\Sigma}\pi\frac{1}{2}p=mp\frac{3,141}{\Sigma} \\ kc'g'B=ml \\ Bg'b'=mp\frac{\text{tang}\,\varphi'}{\cos\varphi'} \end{array}\right\} \quad (A)$$

essendo $l=k'k''$ che congiunge i punti medii delle due sezioni normali Bg', e kc', limiti di $Bg'c'k$, la quale l è conosciuta ap-

pena ch'è data a, ed anche senza di essa ordinariamente in media.

Indicherà Σ il coefficiente numerico che affetterà la frazione di circonferenza al saliente, corrispondente a φ; φ' indicherà l'angolo di proiezione al rientrante; ed essendo i lati del trapezio di sezione egualmente inclinati alla verticale; il centro di gravità della sezione m cadrà nella verticale, che passa pei punti medii dei lati paralleli; e sarà $p=\frac{1}{2}0$. Supponiamo per poco che sia nulla la variazione della sezione del riempimento al saliente e al rientrante; e sarà perciò uguale al profilo generatore, che chiameremo R'. Questo porterà che si potrà stabilire $m=\frac{9}{10}R'=R''$; fatta $a=x$, $b=y$, la sezione trapezia m data in valore numerico R'', della quale cerchiamo le dimensioni, avrà per espressione

$$R''=xy-2y\cot\alpha'.\frac{1}{2}y=xy-y^2\cot\alpha'$$

dinotando α' l'angolo della scarpa col fondo del fosso; da cui

$$x=\cot\alpha' y^2+\frac{R''}{y}.$$

Si fisserà un valore b per y, conveniente alla fortificazione e si chiami a il valore di x, si avrà

$$a=\cot\alpha' b^2+\frac{R''}{b}.$$

Una volta conosciute a e b si conoscerà pure p e considerato che la sezione $m=b\frac{a-2n}{2}$, si potranno calcolare le tre espressioni (A). Paragonando la somma dei tre solidi, alla già calcolata solidità del riempimento diminuita del rapporto; e che noi abbiamo fatta rappresentare da N: la differenza indicherà l'errore che si commette supponendo, (al saliente e al rientrante) nulla la variazione della sezione normale alla magistrale.

Or la lunghezza è da rimanere intatta, onde la terza dimensione del solido non dovrà essere alterata; quindi si farà cadere la variazione o sulla larghezza o sulla profondità. Per omogeneità di calcolo si farà ammontare o diminuire convenevolmente

la profondità, sì che abbia a rimettersi l'equilibrio tra N, e la somma trovata. Se tutta la variazione rendesse disconvenevole b pei riguardi della fortificazione se ne farebbe cadere una porzione sopra di a nell'espressione di m.

Il tipo del calcolo potrebbe prendere questa forma

Preparazione	*Esecuzione*
1° Solido $mp\frac{3,141}{2\Sigma}$	$\log.a=$
2° mp	$\log.p=\log.a-\log.2$
3° $\frac{mp\,\text{tang}\,\varphi'}{\cos\varphi'}$	$\log.m=\log.b+\log.\left(\frac{a-2n}{2}\right)$
$p=\frac{1}{2}a$	1° solido $=\log.m$
	$+\log.p$
$m=b\,\frac{a-2n}{2}$	$+\log.3,141$
	$-\log.2$
$a=\text{cotang}\,a'b+\frac{R''}{b}$	$-\log.\Sigma$
l è conosciuto sulla magistrale da principio	Tot. Numero
	2° solido $=\log.m$ $+\log.l$ { calcolo chè si potrebbe risparmiare per a tro.
	Tot. Numero
	3° solido $\log.m$
	$+\log.p$
	$+\log.\text{tang}\,\varphi'$
	$-\log.\cos\varphi'$
	Tot. Numero
N—A=D..... differenza	Totale A

larghezza $=a+\omega$
profondità $=b+\omega$.

Se la differenza è non molto grande, può trascurarsi. Se le

terre sono leggere infine, quantunque la controscarpa si facesse ripida, i nemici potrebbero agevolmente discenderla, battendo i talloni contr'essa.

22. Veniamo ora alle obbiezioni che ci si potrebbero fare su tal metodo; almeno quelle che ci sembrano le più facili che ci si presenteranno

In primo luogo sul fronte bastionato, che il fosso non segue l'andamento dell'opera, non si potrebbe esattamente seguire il metodo: risponderemo ch'è facile calcolare il solido di più che si cava. E siccome il fronte bastionato si adopera in circostanze imponenti, così si dovrà adoperare ivi l'artiglieria, epperò le barbette, le rampe, le traverse, ecc., troveranno in quest'esuberanza di che disporre. E così le corone, le opere a corna, ecc., che derivano da esso, vanno con questo compresi. Tutti gli altri casi presentano salienti e rientranti alternati, o così presso a poco.

In secondo luogo si potrebbe obbiettare che tal metodo costringerebbe a stabilire notamenti per ciascun saliente e per ciascun rientrante, e per ciascun ramo in che dividesi l'opera. Ma osserveremo pertanto che il Savart, il Fallot, ed altri recentissimi scrittori, trattandosi di opere di campagna precisamente, propongono ed insegnano di praticare notamenti d'una seguela di solidi prismatici, notamenti niente più semplici di ciò che proponiamo noi, sì per l'insieme, che per gli elementi parziali. Laonde noi niente proponendo assolutamente per le opere tumultuarie e per le frettolose; diciamo che laddove potesse essere concesso dal tempo e dai mezzi di stabilire i notamenti proposti da essi; potrebbe, con vantaggio dell'esattezza e della semplicità dell'operare, surrogarsi quelli proposti da noi; riflettendo, che i solidi verrebbero ad essere uniformi, e quindi numerabili progressivamente; e l'operazione riuscirebbe sempre più facile a misura che vi si prenderebbe l'abito di usarla.

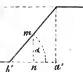
In terzo luogo si potrebbe obiettare che le operazioni dei logaritmi importano l'uso delle tavole; e quindi esse si rendono

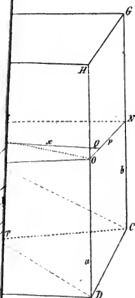
indispensabili per coloro che sono incaricati di siffatte cose. E noi risponderemo del non recarci alcuna maraviglia, anzi ci si permetterà maravigliarci del contrario.

Infatti: se il soldato si munisce delle sue armi e dei suoi arredi, e fida sulle sue spalle il suo piccolo magazzino; se in guerra recansi protocolli; raccolte di carte topografiche; ed altro pei lavori: insomma; se ognuno si munisce di ciò ch'è indispensabile all'esercizio delle sue funzioni; se infine ognuno, che possa usar di un taccuino, se ne munisce: potrà mai recar meraviglia che un ufficiale porti seco le tavole logaritmiche comuni che non oltrepassano in volume un taccuino? Anzi, se pur non ci appigliamo al male, ei ci par cosa impossibile il far di manco di portar seco indivisibilmente oltre le tavole logaritmiche un memorialetto, ove sia raccolta la somma delle principali notizie, delle numerosissime cose speciali, delle svariate conoscenze, che abbisognano ai diversi lavori nella guerra. E non è certo comune, ma sibbene singolarissimo un uomo di tanta forza ristentiva che in buona e fresca mente portasse i risultati delle svariate cognizioni che oggidì abbisognano ad un guerriero scientifico.

Accolgano di buon cuore i nostri giovani colleghi questo lavoro: e se loro sarà d'alcuna utilità o compiacenza, ci terremo fortunatissimi e paghi abbastanza delle veglie e delle cure che nell'intesserlo ci ha cagionate.

LUIGI GABRIELE PESSINA
Capitano di Fanteria
Antico Alunno del R. Collegio Militare della Nunziatella — Napoli.





Lit. Steeger


BIBLIOTECA